Πρόταση

Η συλλογή $\mathcal{A}_b$ περιέχει όλα τα φραγ[μένα]
ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$
(όμοια απόδειξη με των παραπάνω)

Πρόταση

$A_1, A_2 \in \mathcal{A}_b$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ τότε
$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_b$ και $V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$

Απόδ

A_1, A_2 φραγμένα $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ φραγμένο
$\overline{V}(A_1 \cup A_2) \leq \overline{V}(A_1) + \overline{V}(A_2) \overset{A_1, A_2 \in \mathcal{A}_b}{=\!=} V(A_1) + V(A_2)$
A_1, A_2 ξένα $\rightarrow \underline{V}(A_1 \cup A_2) \geq \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) \overset{A_1, A_2 \in \mathcal{A}_b}{=\!=}$

Κριτήριο χαρακτηρισμου του $V(A)$ ως ένα ομαλο μετρο.

<u>Πρόταση</u>

Εστω A φραγμενο. Τοτε $A \in \mathcal{A}_b$ αν.ν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G$ και K : G ανοιχτο, K συμπαγες : $K \subseteq A \subseteq G$ τ/ω $V(G-K) < \varepsilon$

<u>Αποδ</u>

($\Rightarrow$) $A \in \mathcal{A}_b \Rightarrow A$ μετρήσιμο $\Rightarrow \underline{V}(A) = \overline{V}(A) = V(A)$

Εστω τυχαίο $\varepsilon > 0$

Αρα, το $\underline{V}(A)$ υπάρχει και είναι πραγματικος αριθμος. Δηλ $\underline{V}(A) = \sup\{V(K) : K \subseteq A, K \text{ συμπ}\} = \sup B \in$

Αρα, $B \neq \emptyset \Rightarrow \exists K \subseteq A$ συμπαγες

ομοια και με το εξωτερικο μετρο του A, αρα $\exists G$ $A \subseteq G$, ανοιχτο.

$\underline{V}(A) - \varepsilon/2 \leq V(K) \leq \underline{V}(A) \Rightarrow \underline{V}(A) \leq V(K) + \varepsilon/2$

και $\overline{V}(A) \geq V(G) - \varepsilon/2$

$K \subseteq A \subseteq G \Rightarrow G = (G-K) \cup K$ (με $(G-K) \cap K = \emptyset$

$V(G) = V(G-K) + V(K) \Rightarrow V(G-K) = V(G) - V(K) \leq$
$\leq \overline{V}(A) + \varepsilon/2 - \underline{V}(A) + \varepsilon/2 = V(A) - V(A) + \varepsilon = \varepsilon.$

($\Leftarrow$) Εστω $\varepsilon > 0$ τοτε $\exists K \subseteq A \subseteq G$: $V(G-K) < \varepsilon$

Αρα, $\overline{V}(A) - \underline{V}(A) \leq V(G) - V(K) = V(G-K) < \varepsilon$

(αφού $V(K) \leq \underline{V}(A) \leq \overline{V}(A) \leq V(G)$).

<u>Πρόταση</u> (χαρακτηρισμος των $\mathcal{A}_b$ ως άλγεβρα)

Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_b$ τοτε

i) $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$

ii) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}_b$

iii) $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_b$.

<u>Αποδ.</u>

i) απο προηγούμενη προταση και εστω $\varepsilon>0$
$\exists$ K_1, K_2 συμπαγή και G_1, G_2 ανοιχτα τ/ω
$K_i \subseteq A_i \subset G_i$ και $V(G_i - K) < \varepsilon/2$
$\underbrace{K_1 - G_2}_{:=K} \subseteq A_1 - A_2 \subseteq G_1 - K_2 := G$, G ανοιχτο
, K συμπαγές
$G-K = (G_1 - K_2) - (K_1 - G_2) \subseteq (G_1 - K_1) \cup (G_2 - K_2)$
$V(G-K) \leq V(G_1 - K_1) + V(G_2 - K_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ii) και iii) ομοια διαδικασία, με τη βοήθεια της $1^{ης}$ αποδεικνύεται η ii) και με τη βοηθεια της $2^{ης}$ αποδεικνύεται η iii)

<u>Ορισμος</u>
Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (όχι απαραίτητα φραγμένο)
τοτε $\mathcal{A}_b := \{ A \subseteq \mathbb{R}^n : A \cap B_M = A \cap B(0,M)$ φραγμ. & μετρήσιμο$\}$
μετρήσιμο σύνολο κατα Lebesgue θα λεμε καθε σύνολο $A \in \mathcal{A}_b$.
Επίσης, $(V(A \cap B_M))_{M \in \mathbb{N}}$ $\uparrow$ και φραγμ. αρα υπαρχει το οριο της $(V(A \cap B_M))_{M \in \mathbb{N}}$ τ/ω
$\lim_M V(A \cap B_M) = V(A)$

<u>Προταση</u>
Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$
Αν $A_2 \subseteq A_1$, $V(A_1) < \infty$ τοτε $V(A_1 \setminus A_2) = V(A_1) - V(A_2)$
<u>Αποδ</u>
$(A_1 \setminus A_2) \cap B_M = \underbrace{(A_1 \cap B_M)}_{\in \mathcal{A}_b} \setminus \underbrace{(A_2 \cap B_M)}_{\in \mathcal{A}_b} \in \mathcal{A}_b \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$

$A_1 \cap B_M = \left[(A_1 \setminus A_2) \cap B_M \right] \cup (A_2 \cap B_M)$

$V(A_1 \cap B_M) = V\left((A_1 \setminus A_2) \cap B_M \right) + V(A_2 \cap B_M) \Rightarrow$
$\Rightarrow V(A_1 \setminus A_2) = V(A_1) - V(A_2) \Rightarrow V(A_2) \in V(A_1)$

Πόρισμα

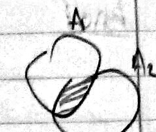
Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

επιπλέον αν $V(A_1) < \infty \Longrightarrow V(A_1 \cap A_2) = V(A_1) - V(A_1 \setminus A_2)$

Αποδ.

$(A_1 \cap A_2) \cap B_M = (A_1 \cap B_M) \cap (A_2 \cap B_M) \in \mathcal{A}_M$

$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$



Πρόταση

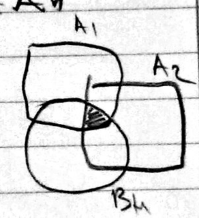
Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

Αν $V(A_1 \cup A_2) < \infty \Rightarrow V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2) - V(A_1 \cap A_2)$

Αποδ

$(A_1 \cup A_2) \cap B_M = (A_1 \cap B_M) \cup (A_2 \cap B_M) \in \mathcal{A}_M$

$(A_1 \cup A_2) \cap B_M = \left[(A_2 \setminus A_1) \cap B_M \right] \cup (A_2 \cap B_M)$



$V((A_1 \cup A_2) \cap B_M) =$

$= V((A_1 \setminus A_2) \cap B_M) + V(A_2 \cap B_M) =$

$= V((A_1 \cap B_M) \setminus (A_1 \cap B_M)) + V(A_2 \cap B_M) =$

$= V((A_1 \cap B_M) \cap (A_2 \cap B_M)^c) + V(A_2 \cap B_M) =$

$= V(A_1 \cap B_M) + V((A_1 \cap B_M) \setminus (A_2 \cap B_M)^c) =$

$= V(A_1 \cap B_M) + V((A_1 \cap B_M) \cap (A_1 \cap B_M)) =$

$= V(A_1 \cap B_M) + V((A_1 \cap A_2) \cap B_M)$.

Σχόλιο : $V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$ αν $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Θα δούμε τώρα ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει και
οπότε λέμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι αριθμή
ή ότι έχει την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικό

Πρόταση: Αν $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ξένων
της $\mathcal{A}$, τότε: i) $A := \bigcup A_\nu \in \mathcal{A}$
ii) $V(A) = \sum V(A_\nu)$

Απόδειξη

Έστω $\mu\in\mathbb{N}$. Επειδή για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$\bigcup_{\nu=1}^{k} (A_\nu \cap B_\mu) = \left(\bigcup_{\nu=1}^{k} A_\nu\right) \cap B_\mu \subseteq A \cap B_\mu$$

Βάση της πρότασης: Αν A_1, A_2 φραγμένα τότε: $\underline{V}(A_1 \cup A_2) \geq$
Εφαρμόζοντας την $k-1$ φορές: $\sum_{\nu=1}^{k} V(A_\nu \cap B_\mu) \leq \underline{V}(A \cap B_\mu)$, ό
$\sum_{\nu=1}^{\infty} V(A_\nu \cap B_\mu) \leq \underline{V}(A \cap B_\mu)$ $(+)$

Έστω τυχόν $\varepsilon>0$: Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ το σύνολο $A_\nu \cap B$
μετρήσιμο, έτσι υπάρχει ανοικτό σύνολο G_ν ώστε: $A_\nu \cap B$

και $V(G_\nu) \leq \overline{V}(A_\nu \cap B_\mu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu} \overset{A_\nu \cap B_\mu \in \mathcal{A}_b}{\Longrightarrow} V(G_\nu) \leq V(A_\nu \cap B_\mu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu}$ (*)

Τώρα, θέτω $G = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} G_\nu$. Ακόμα $A \cap B_\mu \subseteq G \Rightarrow \overline{V}(A \cap B_\mu) \leq V(G)$ (1)

Από την πρόταση: Αν $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία φραγμένων ανοικτών συνόλων

τότε $V\left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu\right) \leq \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V(A_\nu)$

Άρα, $V(G) \leq \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V(G_\nu) \overset{(*)}{\leq} \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \left[\underline{V}(A_\nu \cap B_\mu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu}\right] = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V(A_\nu \cap B_\mu) + \varepsilon$, (2)

διότι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 1$, επειδή, παίρνοντας το ν-οστό μερικό άθροισμα:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2^\nu} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^\nu}$, όπου

$\lim\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right) = 1$, αφού $2 = 1+1 \Rightarrow 2^\nu = (1+1)^\nu \geq 1 + \nu > \nu \to +\infty \Rightarrow 2^\nu \to +\infty$.

Από (1),(2): $\overline{V}(A \cap B_\mu) \leq \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V(A_\nu \cap B_\mu) + \varepsilon$, ε τυχαίο $\Rightarrow$

$\overline{V}(A \cap B_\mu) \leq \sum_{\nu \in \mathbb{N}} V(A_\nu \cap B_\mu) \overset{(+)}{\leq} \underline{V}(A \cap B_\mu) \xRightarrow[\text{αφού } A \cap B_\mu \text{ φραγμένο.}]{\underline{V}(A \cap B_\mu) \leq \overline{V}(A \cap B_\mu) \text{ (ισχύει πάν}}$

$\overline{V}(A \cap B_\mu) = \underline{V}(A \cap B_\mu) \Rightarrow A \cap B_\mu \in \mathcal{A}_b \Rightarrow A \in \mathcal{A}$.

Ακόμα, $V(A \cap B_\mu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V(A_\nu \cap B_\mu)$.

$V(A) = \lim_{\mu \to +\infty} V(A \cap B_\mu) = \lim_{\mu \to +\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} V(A_\nu \cap B_\mu)$

Θέτω $a_{k\mu} := \sum_{\nu=1}^{k} V(A_\nu \cap B_\mu)$, παρατηρώ ότι ισχύει $\forall k, \mu \in \mathbb{N}$:

$a_{k\mu} \leq a_{(k+1)\mu}$ και $a_{k\mu} \leq a_{k(\mu+1)}$, άρα αύξουσα

Από πρόταση 7.19: $\lim_{\mu} \lim_{k} a_{k\mu} = \lim_{k} \lim_{\mu} a_{k\mu}$, οπότε:

$\lim_{\mu \to +\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} V(A_\nu \cap B_\mu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V(A_\nu) \Rightarrow V(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V(A_\nu)$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 1η

$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \cap B_\mu$ μετρήσιμο, $\forall \mu \in \mathbb{N}\}$
φραγμ.

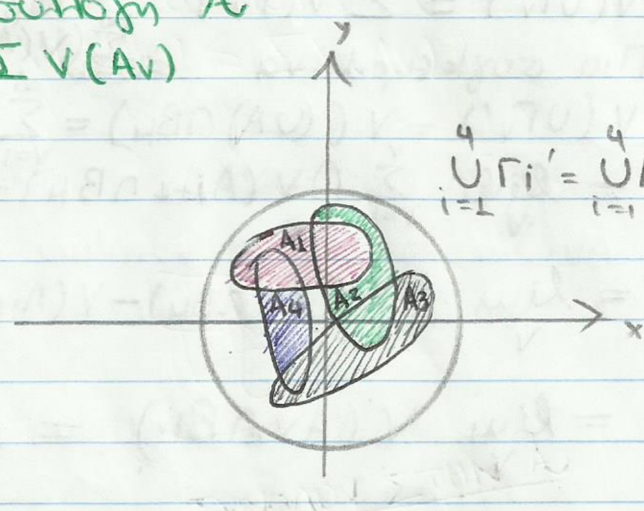
Προταση 14.28

Εστω (A_ν) ακολουθια συνόλων στη συλλογή $\mathcal{A}$.
Τοτε $\bigcup A_\nu \in \mathcal{A}$ και $V(\bigcup A_\nu) \leq \sum V(A_\nu)$

Αποδειξη

Ορίζουμε την ακολουθια συνόλων

$\bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i' = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$



$\Gamma_1' := A_1$

$\Gamma_2' := A_2 \setminus A_1$

$\Gamma_3' := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$\Gamma_\nu' := A_\nu \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{\nu-1})$

Προφανως, $\Gamma_\nu' \subseteq A_\nu \in \mathcal{A}$ και $\Gamma_\nu' \cap \Gamma_\mu' = \emptyset$, $\forall \mu \neq \nu$

Απο την προταση 14.27

$\bigcup \Gamma_\nu' = \bigcup A_\nu \in \mathcal{A}$ και $V(\bigcup \Gamma_\nu') = \sum V(\Gamma_\nu')$ (1)

Συγκεκριμενα, εχουμε:

$V(\bigcup A_\nu) = V(\bigcup \Gamma_\nu') \overset{(1)}{=} \sum V(\Gamma_\nu') \overset{\Gamma_\nu' \subseteq A_\nu}{\leq} \sum V(A_\nu)$

Και η αποδειξη είναι πλήρης.

Προταση 14.29:

Εστω (A_ν) μία αυξουσα ακολουθια συνόλων της συλλογής $\mathcal{A}$.
Τότε $\bigcup A_\nu \in \mathcal{A}$ και $V(\bigcup A_\nu) = \lim_\nu V(A_\nu)$

Αποδειξη

Από την προταση 14.28 αφου για καθε (A_ν) εν $\mathcal{A}$ εχουμε $\bigcup A_\nu \in \mathcal{A}$ τότε και για αυτή τη συγκεκριμένη κατηγορία ακολουθίας θα ισχυει το ιδιο.

Εστω τυχον $\mu \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε την ακολουθια συνόλων

$(\bigcup_{i=1}^{4} A_i) \cap B_\mu = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$

$V(\bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i') = V(\bigcup_{i=1}^{4} A_i \cap B_\mu)$

$\Gamma_1' := \emptyset = A_0$

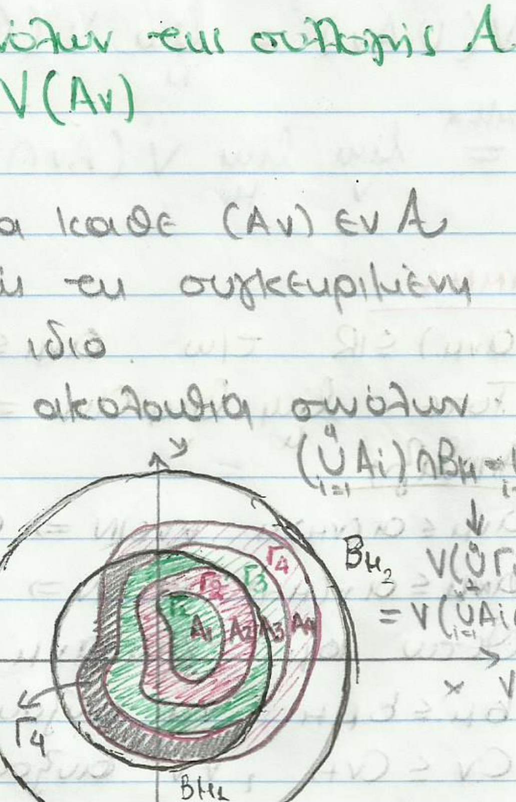
$\Gamma_2' := A_1 \cap B_\mu$

$\Gamma_3' := (A_2 \cap B_\mu) \setminus (A_1 \cap B_\mu)$

$\vdots$

$\Gamma_{\nu+1}' := (A_\nu \cap B_\mu) \setminus (A_{\nu-1} \cap B_\mu)$

$\Gamma_\nu' \subseteq A_\nu \in \mathcal{A}$



Πρωτ. 2 (Φύλλο βοηθειας)

$A_{\nu-1} \cap B_\mu \subseteq A_\nu \cap B_\mu$

Απο προταση 14.27

$V(\cup \Gamma_\nu') = \sum V(\Gamma_\nu')$ Παρατηρώ $V(\Gamma_{\nu\mu}') = V(\underbrace{A_\nu \cap B_\mu}) - V(\underbrace{A_{\nu-1} \cap B_\mu}_{V(\Gamma_2')})$

Πιο συγκεκριμένα $= \sum_{\nu=3}^{\infty} (V(A_{\nu-1} \cap B_\mu) - V(A_{\nu-2} \cap B_\mu)) = \sum_{\nu=1}^{\infty}$

$V(\cup \Gamma_\nu') = V((\cup A_\nu) \cap B_\mu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (V(A_{\nu+1} \cap B_\mu) - V(A_\nu \cap B_\mu)) + V(A_1 \cap B_\mu) =$

$= \lim_\nu \sum_{i=1}^{\nu} (V(A_{i+1} \cap B_\mu) - V(A_i \cap B_\mu)) + V(A_1 \cap B_\mu) =$

$= \lim_\nu (\cancel{V(A_2 \cap B_\mu)} - V(A_1 \cap B_\mu) + \cancel{V(A_3 \cap B_\mu)} - \cancel{V(A_2 \cap B_\mu)} + \dots + V(A_1 \cap B_\mu))$ $V(A_\nu \cap B_\mu)$ τηλεσκοπικο

$= \lim_\nu V(A_\nu \cap B_\mu) =$

$= \lim_\nu a_{\nu\mu}$

$\boxed{\text{Το οριο παραπάνω υπαρχει αφου } (A_\nu) \uparrow \text{ τοτε } V(A_\nu \cap B_\mu) \uparrow \text{ και φραγμ.}}$

όπου:

$a_{\nu\mu} := V(A_\nu \cap B_\mu)$.

Με τη βοήθεια του ΛΗΜΜΑΤΟΣ:

αφου η ενωση θα είναι το μεγαλύτερο σύνολο αυτων για μεγαλα ν.

$V(\cup A_\nu) = \lim_\mu V((\cup A_\nu) \cap B_\mu) = \lim_\mu \lim_\nu V(A_\nu \cap B_\mu) =$

$\overset{\text{Λήμμα}}{=} \lim_\nu \lim_\mu V(A_\nu \cap B_\mu) = \lim_\nu V(A_\nu)$

ΛΗΜΜΑ

$(a_{\nu\mu}) \subseteq \mathbb{R}$ τ/ω $a_{\nu\mu} \le a_{(\nu+1)\mu}$ και $a_{\nu\mu} \le a_{\nu(\mu+1)}$

Τότε $\lim_{\mu} \lim_{\nu} a_{\nu\mu} = \lim_{\nu} \lim_{\mu} a_{\nu\mu}$

Απόδειξη

$a_{\nu\mu} \le a_{(\nu+1)\mu}$ $\forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{\nu\mu}$ αύξουσα $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$a_{\nu\mu} \le a_{\nu(\mu+1)}$ $\forall \mu \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{\nu\mu}$ αύξουσα $\forall \mu \in \mathbb{N}$

Θέτω $b_\mu := \lim_{\nu} a_{\nu\mu}$ και $c_\nu := \lim_{\mu} a_{\nu\mu}$

$b_\mu \le b_{\mu+1}$, $\forall \mu$ αύξουσα και άρα θα $\exists \lim b_\mu := b$ στο $\tilde{\mathbb{R}}$

$c_\nu \le c_{\nu+1}$, $\forall \nu$ αύξουσα και άρα θα $\exists \lim c_\nu := c$ στο $\tilde{\mathbb{R}}$

Όμως, $a_{\nu\mu} \le b_\mu \le b$, $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N} \Rightarrow c_\nu = \lim_{\mu} a_{\nu\mu} \le b \Rightarrow \lim_{\nu} c_\nu = c \le b$

όμοια αποδεικνύεται ότι $b \le c$ και άρα $c = b$

Πρόταση 14.30

Αν (A_ν) ακολουθία συνόλων της συλλογής $\mathcal{A}$, τότε $\bigcap A_\nu \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη

Θδο $(\bigcap A_\nu) \cap B_\mu$ είναι μετρήσιμο

Εφόσον $\mathbb{R}^n = \bigcup B_\mu$ τότε $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

μία μεγιστη υπάρχει

Και αφού $\bigcap A_\nu = (\bigcap A_\nu) \cap \mathbb{R}^n = (\bigcap A_\nu) \cap (\bigcup B_\mu)$

όπου $A_\nu \in \mathcal{A}$ και άρα $(\bigcap A_\nu) \cap (\bigcup B_\mu)$ μετρήσιμο σύνολο

Πρόταση 14.31

Αν (A_ν) φθίνουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}$, με $V(A_1)<\infty$, τότε $\bigcap A_\nu \in \mathcal{A}$ και $V(\bigcap A_\nu) = \lim_\nu V(A_\nu)$ ← το μέτρο του μικρότερου συνόλου A_ν

Απόδειξη

Το ότι $\bigcap A_\nu \in \mathcal{A}$ αποδείχθηκε γενικά στην πρόταση 14.30.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων:

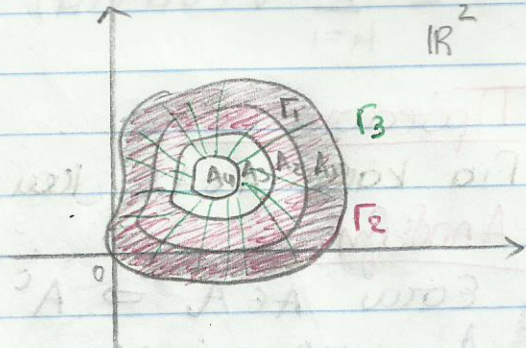
$\Gamma_1' := A_1 \setminus A_2$

$\Gamma_2' := A_1 \setminus A_3$

⋮

$\Gamma_\nu' := A_1 \setminus A_{\nu+1}$ $\quad \Gamma_\nu' \subseteq A_1 \in \mathcal{A}$

όπου (Γ_ν') είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων της συλλογής $\mathcal{A}$



Άρα, από την Πρόταση 14.29 έχουμε

$$V(\bigcup \Gamma_\nu') = \lim V(\Gamma_\nu') = \lim V(A_1\setminus A_{\nu+1}) \overset{A_{\nu+1}\subseteq A_1}{=} \lim (V(A_1)-V(A_{\nu+1})) =$$

$$= V(A_1) - \lim V(A_{\nu+1}) = V(A_1) - \lim V(A_\nu) \quad (1)$$

Επίσης, ισχύει

$$V(\bigcup\Gamma_\nu') = V(A_1 \setminus \bigcap A_{\nu+1}) \underset{\text{χαρτάκι}}{\overset{A_{\nu+1}\subseteq A_1}{=}} V(A_1) - V(\bigcap A_\nu) \quad (2)$$

Άρα, από τις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$V(\bigcap A_\nu) = \lim V(A_\nu).$$

$A_1\cap A_2\cap A_3 = A_3$ $\quad \bigcap A_\nu = \bigcap A_{\nu+1}$

$A_2\cap A_3 = A_3$ $\quad A_1\cap A_2\cap\dots = A_2\cap A_3\cap\dots$

Δεν χάνω πληροφορία

(Κάτι αντίστοιχο της πρότασης 5) Θα δούμε ότι κάτι παρόμοιο συμβαίνει με κάθε μετρήσιμο σύνολο

Πρόταση 14.32:

Για κάθε $A\in\mathcal{A}$ και ένα τυχαίο $\varepsilon>0$, υπάρχει ανοιχτό σύνολο G τέτοιο ώστε $A\subseteq G$ και $v(G\setminus A)<\varepsilon$

Απόδειξη

Εφόσον $A\in\mathcal{A}$ τότε το $A_\mu := A\cap B_\mu$ είναι φραγμένο μετρήσιμο σύνολο. Έστω $\varepsilon>0$ γνωρίζοντας ότι
$\bar{v}(A_\mu)=\inf\{v(G_\mu) : A_\mu\subseteq G_\mu,\ G_\mu \text{ ανοιχτό}\}$

Θα υπάρχει ένα G_μ ανοιχτό τ.ω. $A_\mu\subseteq G_\mu$ με
$v(A_\mu) \underset{\text{μετρ.}}{\overset{A_\mu}{=}} \bar{v}(A_\mu) > v(G_\mu)-\varepsilon^* \iff v(G_\mu)-v(A_\mu)<\varepsilon^*$ $\left(\varepsilon^*=\frac{\varepsilon}{2^\mu}\right)$

Όμως ισχύει ότι:
$G_\mu = (G_\mu\setminus A_\mu)\cup A_\mu$ όπου $(G_\mu\setminus A_\mu)\cap A_\mu=\emptyset$ $(A_\mu, G_\mu\setminus A_\mu\in\mathcal{A})$

Άρα, $v(G_\mu)=v(G_\mu\setminus A_\mu)+v(A_\mu)$ (πρόταση $*$)

$\hookrightarrow v(G_\mu\setminus A_\mu)=v(G_\mu)-v(A_\mu)<\frac{\varepsilon}{2^\mu}=\varepsilon^*$

Έστω το σύνολο $\boxed{G:=\bigcup_{\mu=1}^{\infty} G_\mu}$ είναι ανοιχτό, προφανώς περιέχει το A, αφού $\boxed{A=\bigcup A_\mu}$ και επιπλέον από την πρόταση 14.28 ισχύει:

$v(G\setminus A)=v\left(\left(\bigcup G_\mu\right)\setminus\left(\bigcup A_\mu\right)\right)\le v\left(\bigcup (G_\mu\setminus A_\mu)\right)\le$
$\le \sum_{\mu=1}^{\infty} v(G_\mu\setminus A_\mu) < \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^\mu}=\varepsilon$

$\to A_1\cup A_2-(A_3\cup A_4)=$
$=A_1\cup A_2\cap A_3^c\cup A_4^c=$
$=(A_1-A_3)\cup(A_2-A_4)$

Πρόταση 14.33

Για κάθε $A\in\mathcal{A}$ και $\varepsilon>0$, $\exists\, F$ κλειστό $\subseteq A$ τ.ω. $v(A\setminus F)<\varepsilon$

Απόδειξη

Έστω $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$ (αφού $\mathbb{R}^n\in\mathcal{A}$, $A\in\mathcal{A} \underset{\sigma\text{-άλγεβρα}}{\overset{\text{ιδιότητα}}{\Longrightarrow}} \mathbb{R}^n\setminus A\in\mathcal{A}$)

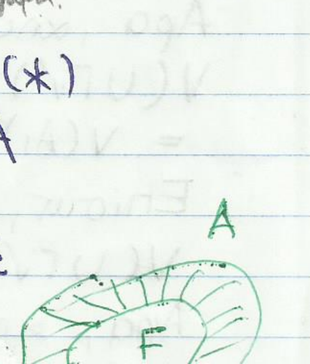
Άρα, από την πρόταση 14.32

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\, G$ ανοιχτό $\supseteq A^c$ με $v(G\setminus A^c)<\varepsilon$. $(*)$

Θέτω $F:=G^c$ κλειστό και μάλιστα $F\subseteq A$

και

$v(A\setminus F)=v(A\setminus G^c)=v(A\cap G)=v(G\setminus A^c)\overset{(*)}{<}\varepsilon$



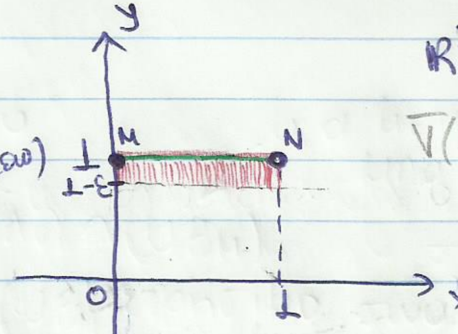
Ορισμός

Θα λέμε ότι είναι ένα σύνολο μηδενικό αν $V(A)=0$

Παράδειγμα:

$A = \{ (x,1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \}$

Δηλ. το A είναι το ευθύγραμμο τμήμα MN.



$\mathbb{R}^2$

$\overline{V}(A) = \underline{V}(A)$

Το A προφανώς συμπαγές σύνολο και άρα μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$

Τότε $A \subseteq ([0,1]\times[0,1]) \setminus [0,1]\times[0,1-\varepsilon]$

Άρα, $V(A) \leq V([0,1]\times[0,1]) - V([0,1]\times[0,1-\varepsilon]) = 1-(1-\varepsilon) = \varepsilon$

Επομένως, $\boxed{V(A) = 0}$

β' τρόπος

Η χωρητικότητα ή μέτρο ενός συμπαγούς συνόλου A είναι $V(A) = \inf\{V(Y) : A \subseteq Y^\circ, \ Y \text{ στοιχ.}\}$

Κατασκευάζουμε στοιχειώδες Y τέτοιο ώστε

$Y = I = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Τότε για κάθε Y: $A \subseteq Y^\circ$

και άρα $V(I) = (4\varepsilon)(2\varepsilon) = 8\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$